Capítulo 4

Derivada

4.1 A Reta Tangente e a Derivada

4.2 Exercícios

Exercício 4.2.1 *Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto $(a, f(a))$ dado abaixo, encontre uma equação para a reta tangente e uma equação para reta normal no mesmo ponto, encontre os pontos onde o gráfico da função tem uma tangente horizontal (se existir) e faça um esboço do gráfico da função representando uma parte da reta tangente no mesmo.*

(a) $y = 9 - x^2$ *em* $x = (-1, 8)$*;* **(b)** $y = x^2 + 4$ *em* $x = (-1, 5)$*;*

(c) $y = -2x^2 + 4x$ *em* $x = (0, 0)$*;* **(d)** $y = x^2 - 6x + 9$ *em* $x = (2, 1)$*;*

(e) $y = x^3 + 1$ *em* $x = (2, 9)$*;* **(f)** $y = 1 - x^3$ *em* $x = (1, 0)$*;*

(g) $y = 3x^2 - 12x + 8$ *em* $x = (0, 8)$*;* **(h)** $y = 7 - 6x - x^2$ *em* $x = (2, -9)$*;*

(i) $y = \sqrt{4 - x}$ *em* $x = (2, \sqrt{2})$*;* **(j)** $y = \sqrt{x + 1}$ *em* $x = (3, 2)$*;*

(k) $y = x^2 - 4x - 5$ *em* $x = (-2, 7)$*;* **(l)** $y = x^2 - x + 2$ *em* $x = (2, 4)$*;*

(m) $y = \dfrac{x^3}{8}$ *em* $x = (4, 8)$*;* **(n)** $y = \dfrac{6}{x}$ *em* $x = (3, 2)$*;*

(o) $y = x^2 + 2x + 1$ *em* $x = (1, 4)$*;* **(p)** $y = 2x - x^3$ *em* $x = (-2, 4)$*;*

(q) $y = x^4 - 4x$ *em* $x = (0, 0)$.

Exercício 4.2.2 *Ache uma equação da reta tangente à curva* $y = 2x^2 + 3$ *que é paralela à reta* $8x - y + 3 = 0$.

Exercício 4.2.3 *Ache uma equação da reta tangente à curva* $y = 3x^2 - 4$ *que é paralela à reta* $3x + y = 4$.

Exercício 4.2.4 *Ache uma equação da reta tangente à curva* $y = x^3 - 3x$ *que é paralela à reta* $2x + 18y - 9 = 0$.

4.3 Teoremas sobre Derivação de Funções Reais de uma Variável Real

4.4 Exercícios

Exercício 4.4.1 *Calcule as derivadas de cada uma das funções abaixo.*

(a) $f(x) = 7x-5$; **(b)** $f(x) = 1-2x-x^2$; **(c)** $f(x) = x^3-3x^2+5x-2$;

(d) $f(x) = \dfrac{x^8}{8} - x^4$; **(e)** $f(t) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{t^2}{2}$; **(f)** $f(x) = x^4-5+x^{-2}+4x^{-4}$;

(g) $f(x) = x^2 + 3x + \dfrac{1}{x^2}$; **(h)** $f(x) = 4x^4 - \dfrac{1}{4x^4}$; **(i)** $v(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$;

(j) $f(x) = (2x^4-1)(5x^3+6x)$; **(k)** $f(x) = (4x^2+3)^2$; **(l)** $f(t) = \dfrac{5t}{1+2t^2}$;

(m) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$; **(n)** $f(y) = \dfrac{y^3-8}{y^3+8}$; **(o)** $f(t) = (t^3-2t+1)(2t^2+3t)$;

(p) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$; **(q)** $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x+5}\right)(3x-1)$;

(r) $f(x) = \left(\dfrac{x^3+1}{x^2+3}\right)(x^2-2x^{-1}+1)$; **(s)** $f(x) = (x^2+3)(2x-5)(3x+2)$;

(t) $f(x) = (3x+2)^2(x^2-1)$; **(u)** $f(x) = (3x^3+x^{-3})(x+3)(x^2-5)$;

(v) $f(t) = (2x^2+x+1)^3$; **(x)** $f(t) = (t^4-3t^2+4t-1)^4$.

Exercício 4.4.2 *Sejam ϕ, f, g e h funções tais que $\phi(x) = f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$. Sabendo que f, g e h são deriváveis em todos os pontos, mostre que $\phi'(x) = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$.*

Exercício 4.4.3 *Ache uma equação da reta tangente à curva dada pela equação $y = (3x^2-2x+4)^2$, no ponto $(1, 25)$.*

Exercício 4.4.4 *Dada a função $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 5$, mostre que $f'(x) \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.*

Exercício 4.4.5 *Ache uma equação de cada uma das retas tangentes e das retas normais à curva $y = x(x-2)(x+2)$ que sejam paralelas à reta $x + 8y - 8 = 0$.*

4.5 Movimento retilíneo e a Derivada como Taxa de Variação

4.6 Exercícios

Exercício 4.6.1 *Uma partícula se move ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir do ponto O em t s. Ache a velocidade instantânea $v(t)$ cm/s em t s então ache $v(t_0)$, para o ponto t_0 indicado.*

(a) $s = 3t^2 + 1$, *em* $t_0 = 3$; **(b)** $s = 8 - t^2$, *em* $t_0 = 5$;

(c) $s = \dfrac{1}{4t} + 1$, *em* $t_0 = \dfrac{1}{2}$; **(d)** $s = \dfrac{3}{t^2} + 1$, *em* $t_0 = -2$;

(e) $s = 2t^3 - t^2 + 5$, *em* $t_0 = -1$; **(f)** $s = 4t^3 + 2t - 1$, *em* $t_0 = \dfrac{1}{2}$;

(g) $s = \dfrac{2t}{4+t}$, *em* $t_0 = 0$; **(h)** $s = \dfrac{1}{t} + \dfrac{3}{t^2}$, *em* $t_0 = 2$;

Exercício 4.6.2 *Uma partícula se move ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir do ponto O em ts. A direção positiva da reta é à direita. Determine os intervalos onde a partícula se move para a direita e para a esquerda. Determine também quando a partícula inverte o sentido do movimento.*

(a) $s = t^3 + 3t^2 - 9t + 4$; **(b)** $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$;

(c) $s = \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 - 2t + 4$; **(d)** $s = \dfrac{t}{1+t^2}$;

(e) $s = \dfrac{t}{9+t^2}$; **(f)** $s = \dfrac{t+1}{4+t^2}$.

Exercício 4.6.3 *Se $A(x)$ c^2 é a área de um quadrado e x cm é a medida do comprimento de cada lado, ache a taxa de variação da medida de $A(x)$ em relação a x, quando x varia de (a)* $4,0$ *a* $4,6$; *(b)* $4,0$ *a* $4,3$; *(c)* $4,0$ *a* $4,1$; *(d)* $4,0$ *a* $4,05$; *(e) Qual da taxa de variação instantânea de variação de $A(x)$ com relação a x, quando x vale* $4,0$.

4.7 Derivada das Funções Trigonométricas

4.8 Exercícios

Exercício 4.8.1 *Ache a derivada de cada uma das funções abaixo.*

(a) $f(x) = 3sen(x)$; **(b)** $f(x) = tg(x) + cotg(x)$; **(c)** $f(x) = 2t\cos(t)$;

(d) $f(x) = \dfrac{2\cos(x)}{x-1}$; **(e)** $f(x) = xsen(x) + \cos(x)$;

(f) $f(x) = 4sen(x)\cos(x)$; **(g)** $f(x) = x^2\cos(x) - 2xsen(x) - 2\cos(x)$;

(h) $f(y) = y^3 - y^2\cos(y) + 2ysen(y) + 2\cos(y)$; **(i)** $f(x) = 3sec(x)tg(x)$;

(j) $f(x) = cotg(x)cossec(x)$; **(k)** $f(x) = \dfrac{sen(x)}{1-\cos(x)}$;

(l) $f(x) = \dfrac{tg(x)}{\cos(x)-4}$; **(m)** $f(x) = \dfrac{1+sen(x)}{1-sen(x)}$;

(n) $f(x) = (x - \sec(x))(x + cossec(x))$; **(o)** $f(x) = \dfrac{2\cos(x)}{x-1}$;

(p) $f(x) = \dfrac{2cossec(x)-1}{cossec(x)+2}$; **(q)** $f(x) = \dfrac{tg(x)+1}{tg(x)-1}$.

Exercício 4.8.2 *Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função seno nos pontos (a)* $x = 0$, *(b)* $x = \dfrac{\pi}{3}$ *e (c)* $x = \pi$.

Exercício 4.8.3 *Ache uma equação da reta tangente ao gráfico da função cosseno nos pontos (a)* $x = \dfrac{\pi}{2}$, *(b)* $x = \dfrac{-\pi}{2}$ *e (c)* $x = \dfrac{\pi}{6}$.

4.9 A Regra da Cadeia

4.10 Exercícios

Exercício 4.10.1 *Ache a derivada de cada uma das funções a seguir.*

(a) $f(x) = (2x+1)^3$; **(b)** $f(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$;

(c) $\dfrac{d}{dx}[sec^2(x)tg^2(x)]$; **(d)** $f(t) = (2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)^2$;

(e) $f(x) = (x^2+4)^{-2}$; **(f)** $f(x) = 4cos(3x) - 3sen(4x)$;

(g) $\dfrac{d}{dx}[cotg^4(x) - cossec^4(x)]$; **(h)** $f(t) = \dfrac{1}{3}sec^3(2t) - sec(2t)$;

(i) $D_u[(3u^2+5)^3(3u-1)^2]$; **(j)** $D_x[(2x-5)^{-1}(4x+3)^{-2}]$;

(k) $D_y[(y+3)^3(5y+1)^2(3y^2-4)]$; **(l)** $D_y\left[\left(\dfrac{y-7}{y+2}\right)^2\right]$;

(m) $f(x) = \left(\dfrac{2x-1}{3x^2+x-2}\right)^3$; **(n)** $f(z) = \dfrac{(z^2-5)^3}{(z^2+5)^2}$;

Exercício 4.10.2 *Ache uma equação da reta tangente à curva* $y = (x^2-1)^2$ *em cada um dos seguintes pontos* $A = (-2, 9)$, $B = (-1, 0)$, $C = (0, 1)$, $D = (1, 0)$ *e* $E = (2, 9)$.

Exercício 4.10.3 *Dado que* $f(x) = x^3$ *e que* $g(x) = f(x^2)$, *encontre* $f'(x^2)$ *e* $g'(x)$.

4.11 A derivada da função potência com expoentes em $\mathbb{Q}$

4.12 Exercícios

Exercício 4.12.1 *Ache uma equação da reta tangente e da reta normal à curva* $y = \sqrt{cos(x) + sen(x)}$, *no ponto* $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercício 4.12.2 *Um objeto move-se ao longo de uma reta, de acordo com a equação de movimento* $s = \sqrt{4t^2 + 3}$, *com* $t \geq 0$. *Ache os valores de* t *de forma que a medida da velocidade instantânea seja (a) 0, (b) 1 e (c) = 2.*

4.13 Derivação Implícita e Taxas Relacionadas

4.14 Exercícios

Exercício 4.14.1 *Uma pipa está voando a uma altura de* $40\ m$. *Uma criança está empinando-a de forma que ela se mova horizontalmente, a uma velocidade de* $3\ m/s$. *Se a linha estiver esticada, com que velocidade a linha está sendo "dada", quando o comprimento da linha desenrolada é de* $50\ m$*?*

Exercício 4.14.2 *Uma bola de neve está se formando de tal modo que seu volume cresça a uma taxa de* $8\ cm^3/min$. *Ache a taxa segundo o raio está crescendo quando a bola de neve tiver* $4\ cm$ *de diâmetro.*

4.15 Derivadas de Ordem Superior

4.16 Exercícios

Exercício 4.16.1 *Encontre as derivadas de 1ª, 2ª e 3ª ordem das funções a seguir.*

(a) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$; **(b)** $f(t) = t^{\frac{1}{3}}$; **(c)** $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x - 1$;

(d) $f(x) = x^2\sqrt{x} - 5x$; **(e)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; **(f)** $f(t) = 4\cos(t^2)$;

(g) $f(x) = cotg^2(x)$; **(h)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$; **(i)** $f(x) = \sqrt{sen(x) + 1}$.

4.17 Valores Extremos de Funções

4.18 Exercícios

Exercício 4.18.1 *Ache os extremos absolutos da função dada no intervalo indicado, se existirem, e determine os valores de* x *nos quais ocorrem os extremos absolutos. Faça um esboço do gráfico da função no intervalo.*

1. $f(x) = 4 - 3x, \ (-1, 2]$;

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \ [-2, 3]$;

3. $f(x) = 2cos(x), \ \left[\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$;

4. $f(x) = \sqrt{3 + x}, \ [-3, +\infty)$;

5. $g(x) = x^3 + 5x - 4, \ [-3, -1]$;

6. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16, \ [-4, 0]$;

7. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16, \ [0, 3]$.

Exercício 4.18.2 Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 + 2x}$; **(b)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{3\cos x}{2x - \pi}$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{tg } x}$;

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{sen\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 6x - 4}{3x^3 - x^2 - 9x + 7}$; **(f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{tg(2x)}{3x}$;

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2}{x^2 - 9}$; **(h)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 5}{x^3}$; **(i)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^3 - 5x^2 - 3x}$.